

Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2026

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za VIII razred osnovne škole

1. **(15 poena)** Odrediti 2025. cifru iza decimalnog zareza u decimalnom zapisu broja $a = \frac{3}{7} + \frac{5}{13}$.

Rješenje. *Prvi način.* Dijeljenjem dobijamo periodične decimalne zapise

$$\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}, \quad \frac{5}{13} = 0.\overline{384615}.$$

Pošto oba broja imaju period dužine 6, njihov zbir je

$$\begin{array}{r} 0.\overline{428571} \\ + 0.\overline{384615} \\ \hline 0.\overline{813186} \end{array}$$

odnosno $a = 0.\overline{813186}$. Kako je $2025 = 6 \cdot 337 + 3$, tražena cifra je treća cifra u periodu 813186, tj. 3.

Drugi način. Direktnim sabiranjem dobijamo $a = \frac{3}{7} + \frac{5}{13} = \frac{74}{91}$. Dijeljenjem slijedi $\frac{74}{91} = 0.\overline{813186}$. Pošto pri dijeljenju broja 2025 sa 6 dobijamo ostatak 3, tražena cifra je treća cifra u periodu, odnosno 3..

2. **(20 poena)** Ako je n prirodan broj dokazati da je broj $n^5 - 5n^3 + 4n + 360$ djeljivo sa 120.

Rješenje: Pošto je 360 djeljivo sa 120, dovoljno je dokazati da je $n^5 - 5n^3 + 4n$ djeljivo sa 120. Faktorišemo:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2(n^2 - 1) - 4(n^2 - 1)) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4).$$

Dakle,

$$n^5 - 5n^3 + 4n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2),$$

što je proizvod pet uzastopnih cijelih brojeva. U takvom proizvodu uvijek postoji jedan broj djeljiv sa 5, bar jedan broj djeljiv sa 3, kao i bar dva uzastopna parna broja (jedan je djeljiv sa 2 a jedan sa 4). Zaključujemo da je $n^5 - 5n^3 + 4n$ djeljiv sa $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$.

3. **(20 poena)** Djeca su krenula na ekskurziju autobusima. Autobus smatramo preopterećenim ako je u njemu više od 50 putnika. Andrija i Bojan su zaustavili kolonu i vraćaju sve preopterećene autobuse. Andrija je odredio procenat vraćenih autobusa u odnosu na ukupan broj autobusa, a Bojan procenat vraćenih putnika u odnosu na ukupan broj putnika. Čiji je procenat veći?

Rješenje: Neka je x broj preopterećenih autobusa, a y broj preostalih autobusa. Neka je dalje z broj putnika u preopterećenim autobusima, a w broj putnika u preostalim autobusima. Označimo $a = \frac{x}{x+y}$ i $b = \frac{z}{z+w}$. Znamo da $50 \cdot x < z$ i $w \leq 50 \cdot y$. Odavde je

$$50x \cdot w < z \cdot 50y \implies x \cdot w + x \cdot z < z \cdot y + x \cdot z \implies \frac{x}{x+y} < \frac{z}{z+w}$$

Odavde zaključujemo da je Bojanov procenat veći.

4. **(20 poena)** Na tabli su zapisani svi prirodni brojevi od 1 do 2026. Ana izvodi ukupno 2025 operacija. U k -toj operaciji bira dva broja a i b sa table, briše ih i na tablu upisuje:

- 1) broj $a + b - 2$, ako je k djeljiv sa 7;
- 2) broj $a + b + 3$, ako k nije djeljiv sa 7.

Odredi koji će broj ostati zapisan na tabli nakon svih operacija.

Rješenje: Pošto se u svakoj operaciji dva broja zamjenjuju jednim, poslije 2025 operacija ostaje jedan broj. Primjetimo da kada izvodimo k -tu operaciju, suma svih brojeva na tabli će se ili povećati za 3 ili smanjiti za 2. Neka je S suma svih brojeva na tabli na početku.

$$S = \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 2053351$$

S se smanjuje za 2 kada izvodimo k -tu operaciju, gdje broj $7|k$. Kako brojeva između 1 i 2026 koji su djeljivi sa sedam ima 289 (jer je $2026 = 289 \cdot 7 + 3$), to će se S 289 puta smanjiti za dva, a $2025 - 289 = 1736$ puta povećati za tri. Nakon svih operacija broj na tabli je $S - 2 \cdot 289 + 3 \cdot 1736 = 2057981$.

5. **(25 poena)** Neka je data kružnica sa prečnikom AB i centrom u tački O . Data je tačka P izvan kružnice, tako da je PB tangenta na kružnicu. Prava PA siječe kružnicu u tački C . Ako je $AB = 20$ i $PO = 22$, odrediti površinu trougla $\triangle ABC$.

Rješenje: Kako je PB tangenta, to je $PB \perp AB$. Takođe važi:

$$PO = 22, \quad OB = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

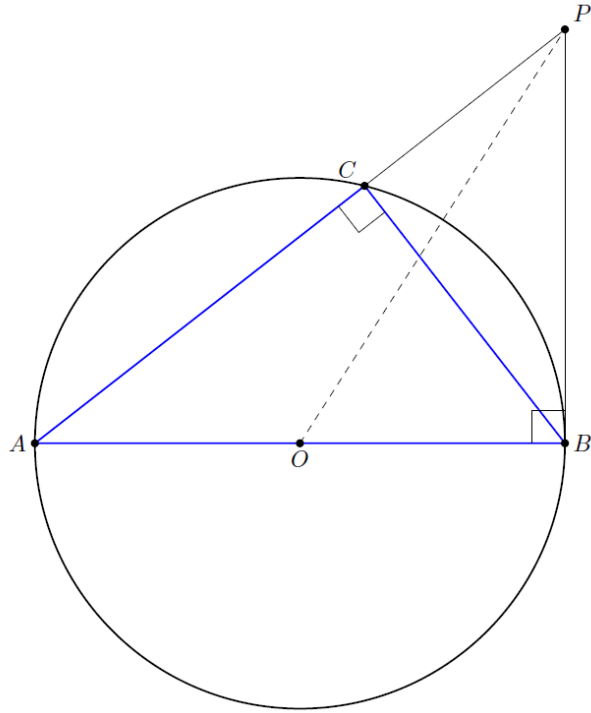


Figure 1: Slika uz 5. zadatak

Zato je

$$PB = \sqrt{PO^2 - OB^2} = \sqrt{22^2 - 10^2} = 8\sqrt{6}.$$

Dalje,

$$PA = \sqrt{AB^2 + PB^2} = \sqrt{20^2 + (8\sqrt{6})^2} = 28.$$

Pošto je AB prečnik kruga, važi

$$AC \perp BC,$$

pa je trougao ABC pravougli. Iz površine trougla $\triangle PAB$ imamo

$$\frac{AP \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot BP}{2}$$

pa je:

$$AP \cdot BC = AB \cdot PB.$$

Dakle,

$$BC = \frac{AB \cdot PB}{AP} = \frac{20 \cdot 8\sqrt{6}}{28} = \frac{40\sqrt{6}}{7}.$$

Sada računamo

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{20^2 - \left(\frac{40\sqrt{6}}{7}\right)^2} = \frac{100}{7}.$$

Zato je površina trougla ABC

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{7} \cdot \frac{40\sqrt{6}}{7} = \frac{2000\sqrt{6}}{49}.$$